BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2009

DÜZ XƏTT SƏRHƏDİNƏ YAXIN YERLƏŞƏN DAİRƏVİ BOŞLUĞU OLAN ELASTİKİ YARIMMÜSTƏVİ ÜÇÜN BİRİNCİ ƏSAS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

M.B.AXUNDOV, İ.Ü.ƏLİYEVA
Bakı Dövlət Universiteti

Təqdim olunan işdə dairəvi boşluğu olan yarımmüstəvi üçün birinci əsas sərhəd məsələsinin həllinə baxılır. Buna qədər baxılan həll üsullarından fərqli olaraq daxili konturda təyin olunmuş naməlum funksiyanın təyini sərhəd şərtinin kontur dəyişəninə görə ayrılışlarla deyil, bu sərhəd şərtinin ortoqonalizasiya prosesindən alınmış sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi ilə əlaqədardır. Cəbri tənliklər sisteminin əmsalları dairəvi kontur boyu inteqrallar vasitəsilə ifadə olunur. Son nəticədə məsələnin həllinin tam qapalı həll alqoritmi verilmiş və gərginliklər maraq doğuran xətlər üzərində təyin olunmuşlar.

Dairəvi boşluğu olan elastiki izotrop yarımmüstəvi üçün birinci əsas sərhəd məsələsinə baxaq. Yarımmüstəvinin düz xətt sərhədində məlum qanunla paylanmış qüvvələr verilib:

$$\sigma_{yy} = N(t)\ ,\ \sigma_{xy} = T(t)\ ;\quad t \in L_0\ , y = 0 \tag{1}$$

və ya Kolosov-Musxelişvili düsturuna əsasən

$$\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + t\overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} = N - iT\ . \tag{2}$$

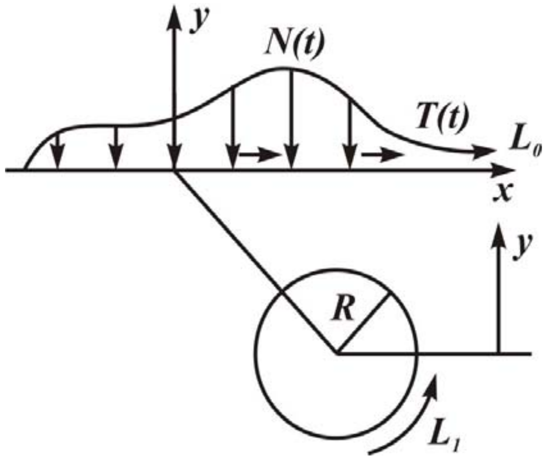
Dairəvi boşluq sərhədi isə qüvvələrdən azaddır:

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0\ , t \in L_1. \tag{3}$$

(2) düsturunda $\Phi_0(t) = \varphi_0'(t), \Psi_0(t) = \psi_0'(t)$ qəbul edilmişdir.

Məlumdur ki, müstəvi məsələnin həlli iki analitik - $\varphi_0(z)$ və $\psi_0(z)$ funksiyalarının təyininə gətirilir. Gərginliklər bu funksiyalar vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2\left[\varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}\right], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2\left[\bar{z}\varphi_0''(z) + \psi_0'(z)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$



Bu funksiyalar (2) və (3) sərhəd şərtlərinə əsasən təyin olunur. Verilmiş məsələni Şerman üsulu ilə həll edək. Daxili L_1 konturu üzərində aşağıdakı kimi $\omega(t)$ funksiyasını daxil edək:

$$2\omega(t) = \varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)}. \tag{5}$$

(5) ifadəsi ilə (3) sərhəd şərtini toplayaq.Onda

$$\omega(t) = \varphi_0(t) \tag{6}$$

alarıq. Aldığımız (6) ifadəsinin hər iki tərəfinə $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t')}{t'-t}dt'$ əlavə edək:

$$\frac{1}{2}\omega(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t')}{t'-t}dt' = \varphi_0(t) - \frac{1}{2}\omega(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t')}{t'-t}dt'.$$

Soxotski-Plemel düsturuna əsasən bu ifadəni aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$\lim_{z\to S^-}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}dt = \lim_{z\to S^+}\varphi(z) + \lim_{z\to S^+}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}dt.$$

Buradan funksiyanın konturdan kənar oblastda analitik davamı teoreminə əsasən tam yarımmüstəvidə analitik olan $\varphi(z)$ funksiyasını aşağıdakı kimi daxil etmək olar:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_0(z) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}dt & z \in S_1, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}dt & z \in S_2. \end{cases} \tag{7}$$

$\varphi(z)$ funksiyası $S_1 + S_2$- də, yəni bütün aşağı yarımmüstəvidə analitikdir.

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}dt \qquad (8)$$

işarə edərək S_1 oblastında $z \in S_1$ üçün alarıq:

$$z \in S_1 \Rightarrow \varphi_0(z)=\varphi(z)-I_1(z) \; . \qquad (9)$$

(6) ifadəsini **(3)** sərhəd şərtində nəzərə alaq:

$$\omega(t)+t\,\overline{\omega'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0 \, .$$

Buradan qoşma alaraq taparıq:

$$\psi_0(t)=-\overline{\omega(t)}-\bar{t}\,\omega'(t) \, . \qquad (10)$$

Aşağıdakı işarələməni qəbul etsək

$$\omega_1(t)=-\overline{\omega(t)}-\bar{t}\,\omega'(t) \, , \qquad (11)$$

onda alarıq:

$$\omega_1(t)=\psi_0(t) \qquad (12)$$

$\varphi(z)$ funksiyasına analoji olaraq tam aşağı yarımmüstəvidə analitik olan $\psi(z)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə daxil edək:

$$\psi(z)=\begin{cases} \psi_0(z)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\omega_1(t)}{t-z}dt & z \in S_1 \, , \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\omega_1(t)}{t-z}dt & z \in S_2 \, . \end{cases} \qquad (13)$$

$\psi(z)$ funksiyası da bütün aşağı yarımmüstəvidə analitikdir.

$$I_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(t)}{t-z}dt$$

ilə işarə edərək S_1 oblastında alınır:

$$z \in S_1 \Rightarrow \psi_0(z)=\psi(z)-I_2(z) \, . \qquad (14)$$

$\omega_1(t)$-nin **(10)** ifadəsini $I_2(z)$-in aldığımız ifadəsində yerinə yazsaq alarıq:

$$I_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}+\bar{t}\,\omega'(t)}{t-z}dt \, . \qquad (15)$$

(9) və (14)-ün törəmələrini alsaq və işarələmələri yada salsaq taparıq:

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \Phi(z) - I_1'(z), \\ \Psi_0(z) = \Psi(z) - I_2'(z). \end{cases} \tag{16}$$

$\Phi_0(z)$ və $\Psi_0(z)$ -in bu ifadələrini **(2)** sərhəd şərtində yerinə yazaq:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = N^* - iT^* . \tag{17}$$

Burada aşağıdakı işarələmədən istifadə olunmuşdur:

$$N^* - iT^* = N - iT + I_1'(t) + \overline{I_1'(t)} + t\,\overline{I_1''(t)} + \overline{I_2'(t)} . \tag{18}$$

(17) ifadəsindən qoşma alaq:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = N^* + iT^* . \tag{19}$$

Onda

$$N^* + iT^* = N + iT + I_1'(t) + \overline{I_1'(t)} + tI_1''(t) + I_2'(t) . \tag{20}$$

Məlumdur ki, $\Phi(t)$ - aşağı yarımmüstəvidə analitik və sonsuzluqda itən $\Phi(z)$ funksiyasının sərhəd qiymətidir, $\overline{\Phi(t)}, t\overline{\Phi'(t)}$ isə yuxarı yarımmüstəvidə analitik və sonsuzluqda itən $\overline{\Phi(z)}, z\overline{\Phi'(z)}$ funksiyalarının sərhəd qiymətləridir. Bunları nəzərə alaraq $z \in S$ üçün **(16)** sərhəd şərtini $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-z}$ -ə vuraraq və düzxətt sərhədi boyu inteqrallayaraq $\Phi(z)$ funksiyası üçün aşağıdakı ifadəni almış oluruq:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N^* - iT^*}{t-z} dt . \tag{21}$$

$\Psi(z)$ üçün **(19)** şərtindən uyğun olaraq

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N^* + iT^*}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N^* - iT^*}{(t-z)^2} dt \tag{22}$$

alarıq. Burada **(18)** və **(20)** ifadələrini yerinə yazaraq və Koşi inteqralı xassəsindən istifadə edərək alınır:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N - iT}{t-z} dt + \overline{I_1'}(z) , \tag{23}$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N + iT}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N - iT}{(t-z)^2} t\, dt + \overline{I_2'}(z) . \tag{24}$$

Axtarılan $\Phi_0(z)$ və $\Psi_0(z)$ funksiyaları üçün sonda aşağıdakı düsturlar alınır:

$$\Phi_0(z)=\Phi(z)-I_1'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{t-z}dt+\overline{I_1'}(z)-I_1'(z), \qquad (25)$$

$$\Psi_0(z)=\Psi(z)-I_2'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{(t-z)^2}t\,dt+\overline{I_2'}(z)-I_2'(z).$$

Sonrakı əməliyyatlar həllə daxil olan naməlum $\omega(t)$ kontur funksiyasının təyini ilə bağlıdır. Dairəvi кontur üzərində $\omega(t)$ funкsiyasını Furye sırasına ayıraq:

$$\omega(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n'\sigma^n\ . \qquad (26)$$

Bu ayrılışı (8) düsturunda yerinə yazaraq, çıxırlar üsulundan istifadə edərək və $-a_{-m}'=a_m$ işarələməsi apararaq $I_1(z)$ üçün aşağıdaкı ifadəni alarıq:

$$I_1(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\left(\frac{R}{z-z_0}\right)^m. \qquad (27)$$

Uyğun olaraq $I_2(z)$ üçün də alınır:

$$I_2(z)=\sum_{m=1}^{+\infty}b_m\left(\frac{R}{z-z_0}\right)^m. \qquad (28)$$

a_m və b_m naməlum əmsalları arasında (11) düsturuna əsasən aşağıdakı əlaqə vardır:

$$b_m=a_{-m}-\frac{\overline{z_0}}{R}(m-1)a_{m-1}-(m-2)a_{m-2}\ .$$

Bunları $\Phi_0(z),\Psi_0(z)$-də yerinə yazaq:

$$\Phi_0(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{t-z}dt-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{R}a_m\left(\frac{R}{z-z_0}\right)^{m+1}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m}{R}\overline{a_m}\left(\frac{R}{z-\overline{z_0}}\right)^{m+1}, \qquad (29)$$

$$\Psi_0(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N+iT}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N-iT}{(t-z)^2}t\,dt-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{R}b_m\left(\frac{R}{z-z_0}\right)^{m+1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{R}\overline{b_m}\left(\frac{R}{z-\overline{z_0}}\right)^{m+1}. \qquad (30)$$

Naməlum a_m sabitləri üçün dairəvi sərhəd şərtindən istifadə edərək cəbri tənliklər sistemini quraq. Bu sərhəd şərtini aşağıdakı şəkildə yazaq.

$$\Phi_0(t)+\overline{\Phi_0(t)}-\left\{t\overline{\Phi_0{}'(t)}+\overline{\Psi_0(t)}\right\}\frac{R^2}{(t-z_0)^2}=0\,. \qquad (31)$$

Qəbul edək ki,

$$N=\begin{cases}-P, & |t|<l\\ 0, & |t|>l\end{cases},T=0\,.$$

Onda (24) və (25) ifadələrini (26) sərhəd şərtində yazaq, həqiqi və xəyali hissələrə ayıraq, sonra $\sin n\theta$ və $\cos n\theta$-ya vuraq və nəhayət, $[0;2\pi]$ intervalında inteqrallayaraq aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alaq:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = k_i \;\; i=\overline{1;m}\,. \qquad (32)$$

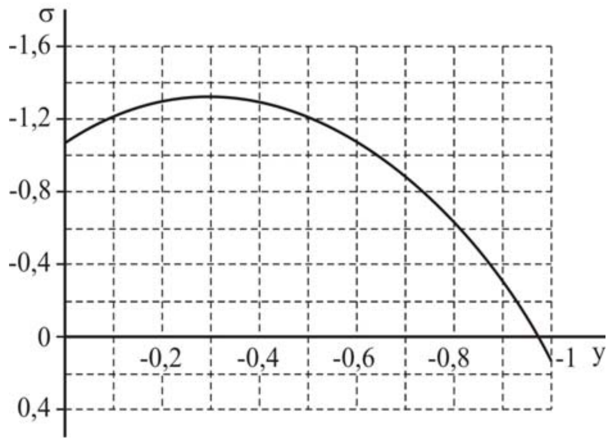
Burada a_{ij} müəyyən inteqrallar vasitəsilə ifadə olunan əmsallardır. x_j isə naməlum a_n əmsallarının həqiqi və xəyali hissələridir. Alınan cəbri tənliklər sistemi R,h,x_0,l,P parametrlərinin $R=1; h=2; x_0=0; l=1; P=1$ qiymətləri üçün həll olunub. (32) tənliklər sistemi birinci səkkiz tənliyi saxlamaqla həll edilmişdir. Saxlanan tənliklərin sayının kifayət olması hesablama nəticəsində təsdiq olunmuşdur. x_j məchulları üçün alınmışdır:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$6{,}749\times10^{-4}$	$4{,}585\times10^{-4}$	$3{,}493\times10^{-6}$	$-5{,}225\times10^{-6}$	$-5{,}58\times10^{-8}$	$-1{,}162\times10^{-7}$	$-2{,}67\times10^{-11}$	$-2{,}321\times10^{-10}$

Buradan görünür ki, əmsalların qiymətləri böyük sürətlə azalırlar:

$$a_1\sim10^{-4}; \quad a_2\sim10^{-6}; \quad a_3\sim10^{-8}; \quad a_4\sim10^{-11}.$$

Təyin olunan əmsallara əsasən (29) və (30) düsturlarına görə $\Phi_0(z)$ və $\Psi_0(z)$ funksiyaları təyin olunur, sonra isə Kolosov-Musxelişvili düsturuna əsasən gərginliklər tapılır və hesablamalar nəticəsində təyin olunmuş gərginliklərin şaquli düz xətt üzərində paylanma qrafiki qurulmuşdur:



ƏDƏBİYYAT

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 708 с.
2. Лаврентъев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965, 716 с.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1971, 272 с.
4. Амензаде Ю.А., Плоская задача теории упругости, 1974, 109 с.

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫМ К ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

М.Б.АХУНДОВ, И.У.АЛИЕВА

РЕЗЮМЕ

В предлагаемой работе рассмотрена первая основная граничная задача для ослабленной круговым отверстием полуплоскости. В отличие от предыдущих методов для нахождения неизвестной контурной функции используется метод ортогонализации, приводящий к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой представляют собой некие определенные контурные интегралы. Дан расчет напряжений вдоль характерной линии.

THE FIRST MAIN BOUNDARY PROBLEM FOR AN ELASTIC SEMI-PLANE WITH CIRCULAR VACUUM NEAR THE STRAIGHT-LINE BOUNDARY

M.B.AKHUNDOV, I.U.ALIYEVA

SUMMARY

This work introduced the solution of the first main boundary problem for the semiplane with circular vacuum. Unlike the previous methods, the ortogonalization method is used for the definition of the unknown counter function leading to the solution of the infinite system of line algorithmic equations, the coefficients of which are expressed by the definite counter integrals. Finally, the full solution of the problem and the calculation of the voltage along the characteristic line are defined.